Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
2ο Διαγώνισμα
Ύλη: 1ο Κεφάλαιο

28 -10-2023

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α , είναι 1-1 αν και μόνον αν για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1=x_2$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

β) Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(f(x))=f(\alpha)$.

γ) Αν $f(x)\geq m$ για κάθε $x\in D_f$ τότε η f έχει ελάχιστο το m.

μονάδες 6

Α5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x΄x, δεν μπορεί να παίρνει ετερόσημες τιμές.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}-f(x)\right)}{x^2+4x+5}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{xe^x}$

μονάδες 12

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\pi)$.

μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

μονάδες 4

Β4. Να εξετάσετε αν η f έχει ελάχιστο το 0.

μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x-2^x-x+1 & ,x>0\\ \ln(-x+1)-e^x+\kappa & ,x\le 0\end{cases}$ για την οποία ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[-1,1]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι κ= 2.

μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση x_0 με $x_0>0$.

μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)}$.

μονάδες 6

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $3^{-|x+1|}+3<2^{|x+1|}+|x+1|+\frac{1}{3}$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ για την οποία για όλα τα $\kappa,\lambda\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$(f(\eta\mu\kappa)+f(\eta\mu\lambda))^2=\left(e^{\eta\mu\kappa}+e^{\eta\mu\lambda}-\eta\mu\kappa-\eta\mu\lambda-2\right)^2$ (1)

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση $(f(x))^2$.

μονάδες 5

Δ2. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $e^x=x+1$ έχει μοναδική λύση την x = 0, να αποδείξετε είτε αλγεβρικά είτε γραφικά, ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $e^x\ge x+1$.

μονάδες 5

Δ3. Αν $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{3}{2}$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$f(x)=e^x-x-1,\ x\in(-1,1).$$

μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $\left[-\frac{999}{1000},\frac{999}{1000}\right]$ και να βρεθεί η θέση ελάχιστης τιμής καθώς και η ελάχιστη τιμή της f.

μονάδες 5

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

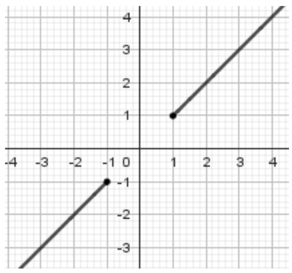
Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Α3. Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ

Α5. α) Ψ

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.



Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν τέμνει τον άξονα x΄x αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$, όμως η f παίρνει ετερόσημες τιμές.

Θέμα Β

Β1. α) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0-1=-1$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}-f(x)\right)}{x^2+4x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x}{x^2+4x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+4x+5}\eta\mu x\right)=0$ γιατί

$$\left|\frac{x}{x^2+4x+5}\eta\mu x\right|\le\left|\frac{x}{x^2+4x+5}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{x}{x^2+4x+5}\right|\le\frac{x}{x^2+4x+5}\eta\mu x\le\left|\frac{x}{x^2+4x+5}\right|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+4x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+4x+5}\eta\mu x\right)=0$$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{xe^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x}{xe^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)e^{-x}\right]=-\infty$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=-1$
- $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$, οπότε από το κριτήριο

  παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

B2. Η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi}=0$ στο $(0,\pi)$ ισοδύναμα γίνεται $f(x)(x-\pi)-x\sigma\upsilon\nu x=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)(x-\pi)-x\sigma\upsilon\nu x, x\in[0,\pi]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξη συνεχών με $h(0)=-\pi<0$, $h(\pi)=\pi>0$. Είναι $h(0)h(\pi)<0$, συνεπώς από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\rho\in(0,\pi)$ τέτοιο ,ώστε $h(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)(\rho-\pi)-\rho\sigma\upsilon\nu\rho=0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\pi)$.

B3. Είναι $f(-\pi)=\sqrt{\pi^2+1}-\eta\mu(-\pi)=\sqrt{\pi^2+1}$ και $f(\pi)=\sqrt{\pi^2+1}-\eta\mu\pi=\sqrt{\pi^2+1}$.

Επειδή $f(\pi)=f(-\pi)$, η f δεν αντιστρέφεται.

B4. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2\ge0\Leftrightarrow1+x^2\ge1\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}\ge1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-\eta\mu x\ge-1$ και η ισότητα ισχύει για $x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$,

άρα $\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x>0\Leftrightarrow f(x)>0$ γιατί η ισότητα δεν ισχύει ταυτόχρονα.

Θέμα Γ

Γ1. Επειδή ισχύει για την f το θεώρημα Bolzano στο $[-1,1]$, η f είναι συνεχής στο 0 , οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2^x-x+1\right]=1-1-0+1=1$,

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln(-x+1)-e^x+\kappa\right]=\ln1-e^0+\kappa=-1+\kappa$. Άρα $-1+\kappa=1\Leftrightarrow\kappa=2$

Γ2. Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_1}+1>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_2}+1$ (1)

$x_1<x_2\Leftrightarrow2^{x_1}<2^{x_2}\Leftrightarrow-2^{x_1}>-2^{x_2}$ (2)

$x_1<x_2\Leftrightarrow-x_1>-x_2$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \le 0$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $-x_1 + 1 > -x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln(-x_1+1) > \ln(-x_2+1)$ (4)

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} + 2 > -e^{x_2} + 2$ (5) και $-x_1 > -x_2$ (6)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4), (5), (6) προκύπτει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x_1 < 0 \le x_2$ είναι $f(x_1) > f(0)$ και $f(0) \ge f(x_2)$, δηλαδή και πάλι $f(x_1) > f(x_2)$.

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(-x+1) - e^x + 2\right] = +\infty - 0 + 2 = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2^x - x + 1\right] = 0 - \infty - \infty + 1 = -\infty .$$

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

$f(0) = \ln 1 - e^0 + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 > 0$, $f(1) = \frac{1}{3} - 2 - 1 + 1 < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $f(x) < 0$ για $x > x_0$.

Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)$, θέτουμε $u = -\dfrac{1}{x-x_0}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right) = -\infty$, αφού $x > x_0$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right) = \lim\limits_{u\to-\infty} f(u) = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right] = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $f(x) > 0$ για $x < x_0$.

Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)$, θέτουμε $u = -\dfrac{1}{x-x_0}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$, αφού $x < x_0$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$.

Τελικά $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(-\dfrac{1}{x-x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\infty$

Γ5. $3^{-|x+1|} + 3 < 2^{|x+1|} + |x+1| + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{-|x+1|} - |x+1| - 2^{|x+1|} + 1 + 2 < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-|x+1|} - 2^{|x+1|} - |x+1| + 1 < \dfrac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow f(|x+1|) < f(1)$ (διότι $f(1) = \dfrac{1}{3} - 2 - 1 + 1 = \dfrac{1}{3} - 2$) $\overset{f \searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$|x+1| > 1 \Leftrightarrow x + 1 > 1$ ή $x + 1 < -1 \Leftrightarrow x > 0$ ή $x < -2$.

Θέμα Δ

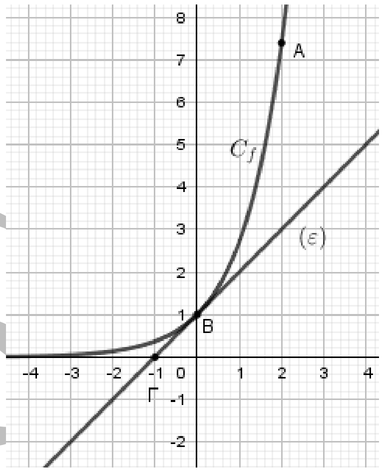
Δ1. Η σχέση (1) για $ημκ = ημλ = x$ με $x \in (-1,1)$ γιατί $κ,λ \in \left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$ γίνεται:

$$\left(f(x)+f(x)\right)^2 = \left(e^x + e^x - x - x - 2\right)^2 \Leftrightarrow \left(2f(x)\right)^2 = \left(2e^x - 2x - 2\right)^2 \Leftrightarrow 4\left(f(x)\right)^2 = 4\left(e^x - x - 1\right)^2$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \left(e^x - x - 1\right)^2,\ x \in (-1,1).$$

Δ2. 1ος τρόπος γραφικά

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις $y = e^x$, $y = x+1, x \in \mathbb{R}$ και βλέπουμε ότι ότι, $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 επειδή το μοναδικό κοινό σημείο είναι το $B(0,1)$, ενώ για $x \neq 0$ ισχύει ότι η γραφική παράσταση της $y = e^x$ είναι πάνω από την $y = x+1$.



2ος τρόπος Αλγεβρικά

Θεωρούμε τη συνάρτηση $φ(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Η φ έχει μοναδική ρίζα τη x = 0, άρα $φ(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και επειδή η φ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $φ(-1) = e^{-1} + 1 - 1 = \frac{1}{e} > 0$, άρα $φ(x) > 0$ για κάθε x < 0.

Είναι $φ(1) = e - 1 - 1 = e - 2 > 0$, άρα $φ(x) > 0$ για κάθε x > 0.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $φ(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$.

Δ3. Έχουμε $\left(f(x)\right)^2 = \left(e^x - x - 1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(f(x)\right)^2} = \sqrt{\left(e^x - x - 1\right)^2} \Leftrightarrow \left|\left(f(x)\right)\right| = \left|e^x - x - 1\right|,\ x \in (-1,1)$ Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x+1$ κατά συνέπεια και για $x \in (-1,1)$ ισχύει $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ άρα $\left|\left(f(x)\right)\right| = e^x - x - 1,\ x \in (-1,1)$.

Για $x \in (-1,1)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 = 0 \overset{Δ2}{\Leftrightarrow} x = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$.

Αλλά $-\frac{1}{2} \in (-1,0)$ με $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$ γιατί $e < 4 \Leftrightarrow \sqrt{e} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2}$ άρα $f(x) > 0$, $x \in (-1,0)$ και $\frac{1}{2} \in (0,1)$ με $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} > 0$ γιατί $e > \frac{9}{4} \Leftrightarrow \sqrt{e} > \frac{3}{2}$ άρα $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$, οπότε $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 0\ , x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = e^x - x - 1,\ x \in (-1,1)$.

Δ4. Ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0}\left(e^x - x - 1\right) = 0$ και για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ ότι $e^x > x + 1$ άρα $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{e^x - x - 1} = +\infty$ κατά συνέπεια $\lim\limits_{x \to 0}\frac{ημx + συνx}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0}\left(ημx + συνx\right)\lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{e^x - x - 1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Δ5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{999}{1000},\frac{999}{1000}\right] \subseteq (-1,1)$, άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής ,παρουσιάζει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m στο διάστημα $\left[-\frac{999}{1000},\frac{999}{1000}\right]$ επειδή η f δεν είναι σταθερή $m \neq M$.Επίσης από το Δ2 ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:$e^x \geq x+1$ άρα και για κάθε $x \in \left[-\frac{999}{1000},\frac{999}{1000}\right]$ ισχύει:$e^x \geq x+1 \Leftrightarrow$ $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ και το x_0=0 είναι μοναδικό .Άρα στο x_0=0 η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το f(0)=0.